Τοπικά και ολικά ακρότατα

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$

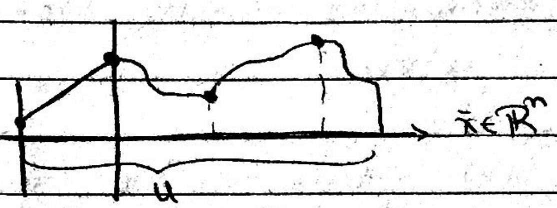
Η f έχει στο $\bar{x} \in U$ ολικό μέγιστο αν $\forall \bar{y} \in U: f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$,
ελάχιστο $\geq$

τοπικό μέγιστο αν $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \bar{y} \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon): f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$
ελάχιστο $\geq$

γνήσιο τοπικό μέγιστο αν $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \bar{y} \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \ f(\bar{y}) < f(\bar{x})$
ελάχιστο $>$

γνήσιο ολικό μέγιστο αν $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}: f(\bar{y}) < f(\bar{x})$
ελάχιστο $>$

Γενικά ένα μέγιστο ή ελάχιστο λέγεται ακρότατο

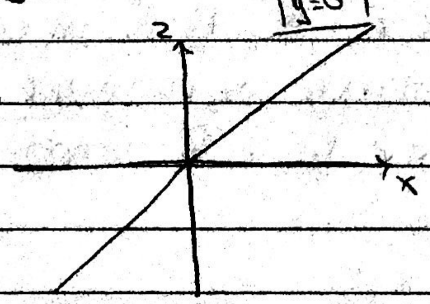


Παρατήρηση-1: Εάν $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f: U \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε υπάρχει σίγουρα ολικό μέγιστο και ελάχιστο.

Παρατήρηση-2: Τα σημεία του π.ο. όπου η συνάρτηση λαμβάνει (τοπ. ή ολ) ακρότατο λέγονται σημεία ακροτάτου (μεγίστου ή ελαχίστου). Μπορεί να είναι περισσότερα για την ίδια τιμή ακροτάτου. Μπορεί να μην υπάρχουν.

πχ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x$



Εργαλεία για την εύρεση ακροτάτων (Ισχύουν μόνο υπό προϋποθέσεις)

Αναγκαία συνθήκη: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο τοπικού ακροτάτου $\bar{x} \in U$. Τότε: $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ τ.ω. $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$ οι συναρτήσεις $g_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $g_i(t) = f(\bar{x} + t e_i)$, $i = 1 \dots n$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 0$ μιας προφανώς που έχουν τοπικό ακρότατο και ισχύει $g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = 0$, σύμφωνα με το Θ. Fermat για πραγματική συνάρτηση

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} \underset{\text{ορ}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} \underset{\substack{\text{ορ.}\\ \text{εδώ}}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g_i(h) - g(0)}{h} \underset{\text{ορ}}{=} g_i'(0)$$

[Γιατί: $f: U \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο $\bar{x} \in U$, $\exists 0 < \varepsilon' < \varepsilon$ $\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon') \subset B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
το μέγιστο

$f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$ $\qquad =g(t) \qquad =g(0)$

$\Rightarrow \forall t \in (-\varepsilon', \varepsilon)$: $\underbrace{f(\bar{x} + t\bar{e}_i)}_{\in B(\bar{x}, \varepsilon')} \leq f(\bar{x}) \Rightarrow t = 0$ είναι (εδώ) σημείο τοπ. μέγιστο της g]

$\in B(\bar{x}, \varepsilon')$ εν $\|t e_i\| = |t| < \varepsilon'$

Παρατήρηση - 3: Τα σημεία $\bar{x} \in U$ μιας $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, στα οποία η f είναι μερικώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow \exists \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$) και $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$, ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f

Παρατήρηση - 4: (Ισχύει για όλα τα θεωρήματα του Α.Α. III)
Έστω μια συνάρτηση $f: V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ όχι απαραίτητα ανοικτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναγκαία συνθήκη για κάθε περιορισμό $f|_U$ σε $U \subset V$ με $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Παρατήρηση 5: Το θεώρημα αναγκαίας συνθήκης δίνει υποψήφια σημεία ακροτ. και βέβαια μόνο (1) σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, όπου (2) η f είναι μερικώς διαφορίσιμη.

Μπορεί δηλαδή ένα εσωτερικό σημείο του π.ο. να είναι κρίσιμο ($\Rightarrow$ και εκεί η f μερ. διαφ.) αλλά τελικά η f να μην έχει ακρότατο εκεί, βλ. παράδειγμα μετά. Μπορεί η f να έχει ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο αλλά να μην είναι εκεί μερ. διαφ. Μπορεί τέλος η f να έχει ακρότατο σε ένα συνοριακό σημείο $\bar{x}$ του π.ο. (και μάλιστα στο $\bar{x}$ να είναι εσωτερικό σημείο κάποιας επέκτασης της f η οποία να είναι μερικώς διαφ. στο $\bar{x}$ με μη μηδενική κλίση), βλ. παράδ.

Παραδείγματα (για τις προηγούμενες παρατηρήσεις)

(1) $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Κάθε $\bar{x} \in U$ είναι τοπικό και ολικό μέγιστο και ελάχιστο (όχι γνήσιο (κανένα από τα $\bar{x} \in U$))

(2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $f(\bar{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ Δεν έχουν κανένα σημείο ακροτάτου.

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ με $\nabla f(x,y) = 2(x,-y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Κρίσιμο σημείο

= υποψήφιο σημείο ακροτάτου

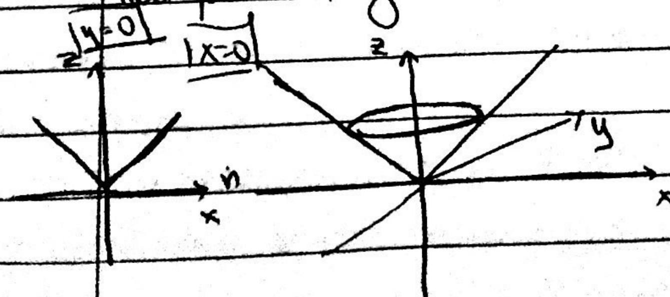
Όμως $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0,0)$ $\forall \varepsilon > 0$

$f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0,0)$ $\forall \varepsilon > 0$.

Το $(0,0)$ δεν είναι άρα ούτε σημείο μεγίστου ούτε σημείο ελαχίστου, άρα δεν είναι σημείο ακροτάτου (αφού δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall (x,y) \in B((0,0), \varepsilon)$: $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ ή $f(x,y) \leq 0 = f(0,0)$), όπου (σάγμα = σαμάρι = σέλλα)

(4) $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Το $\bar{x} = \bar{0}$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου και μάλιστα γνησίου αφού $f(\bar{y}) = \|\bar{y}\| > 0 = \|\bar{0}\|$ $\forall \bar{y} \neq \bar{0}$

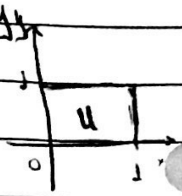
$= f(\bar{0})$



Παρατήρηση: $\nexists \nabla f(\bar{o}) \Rightarrow$ η αναγκαία συνθήκη δεν «ανακαλύπτει» το σημείο αυτό ακροτάτου

Από την άλλη με την αναγκαία συνθήκη μπορούμε να δούμε ότι πουθενά αλλού στον $\mathbb{R}^n$, η $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$ δεν έχει ακρότατο, αφού $\forall \bar{x} \in \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}}_{\text{ανοικτό}}$ $\nabla f(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \Rightarrow \|\nabla f(\bar{x})\| = 1 \neq 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$

(5) Άσκηση: $f: \underset{\text{συμπαγές}}{\bar{U}} \to \mathbb{R}$, $U = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x+y$



Στο U έχουμε $\nabla f(x,y) = (1,1) \neq (0,0) \Rightarrow$ στο U η f δεν έχει ακρότατο. Όμως $\bar{U}$ συμπαγές και $f: \bar{U} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ στο $\bar{U}$ η f έχει ακρότατο.

$\Rightarrow \exists$ σημεία μεγίστου ελαχίστου στο $\partial U = ([0,1] \times \{0\}) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup (\{1\} \times [0,1])$

Άσκηση: Βρείτε τα ((ξανά) συζήτηση της άσκησης)

Ικανή συνθήκη εύρεσης σημείου ακροτάτου (Ισχύει μόνο υπό προϋποθέσεις βγάζει συγκεκριμένα αποτελέσματα)

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται θετικά ορισμένος (ή ορισμένος) αν $\bar{n}^T A \bar{n} > 0 \; \forall \bar{n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ όλες οι ιδιοτιμές είναι (γνήσια) θετικές

αρνητικά ... : $\bar{n}^T A \bar{n} < 0 \; \forall \bar{n} \neq 0 \Leftrightarrow$ A συμμετρικός όλες οι ιδιοτιμές είναι (γνήσια) αρνητικές.

Μη ορισμένος $\Leftrightarrow \exists \bar{n}_1, \bar{n}_2 \in \mathbb{R}^n : \bar{n}_1^T A \bar{n}_1 < 0$ και $\bar{n}_2^T A \bar{n}_2 > 0$
$\Leftrightarrow$ ο A έχει και (γνήσια) αρνητικές και (γνήσια) θετικές ιδιοτιμές
A συμμετρικός

Ικανή συνθήκη τοπικού ακροτάτου: $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^2(U)$ και $\bar{x} \in U$ κρίσιμο σημείο, δηλ $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$.

Θεώ: (α) $H_f(\bar{x})$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο δηλ $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$.

(β) αρνητικά $\Rightarrow$ — μέγιστο

(γ) μη ορισμένος $\Rightarrow$ η f δεν έχει στο $\bar{x}$ τοπικό ακρότατο (αλλά το $\bar{x}$ λέγεται σαγματικό σημείο).